Преобразование кубического эрмитова представления кривых и поверхностей в кубический B-сплайн

Золотаревич В.П.

2020

1 Эрмитовы сплайны для кривых и поверхностей

Представление кривой на интервале $[0, 1]$:

$$\mathbf{P}(u) = \mathrm{H}^0(u)\mathbf{R}(0) + \mathrm{H}^0_u(u)\mathbf{R}_u(0) + \mathrm{H}^1(u)\mathbf{R}(1) + \mathrm{H}^1_u(u)\mathbf{R}_u(1), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(u) &= 2u^3 - 3u^2 + 1, \\ \mathrm{H}^0_u(u) &= u^3 - 2u^2 + u, \\ \mathrm{H}^1(u) &= -2u^3 + 3u^2, \\ \mathrm{H}^1_u(u) &= u^3 - u^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Если кривая задана на интервале $[u_{min}, u_{max}]$, то ее представление запишется в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u) = &\mathrm{H}^0\left(\frac{u - u_{min}}{u_{max} - u_{min}}\right)\mathbf{R}(u_{min}) + \\ &\mathrm{H}^0_u\left(\frac{u - u_{min}}{u_{max} - u_{min}}\right)(u_{max} - u_{min})\mathbf{R}_u(u_{min}) + \\ &\mathrm{H}^1\left(\frac{u - u_{min}}{u_{max} - u_{min}}\right)\mathbf{R}(u_{max}) + \\ &\mathrm{H}^1_u\left(\frac{u - u_{min}}{u_{max} - u_{min}}\right)(u_{max} - u_{min})\mathbf{R}_u(u_{max}) \end{aligned} \tag{3}$$

Представление поверхности на единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$\begin{gathered} \mathbf{P}(u, v) = \\ \mathrm{H}^0(u)\mathrm{H}^0(v)\mathbf{R}(0,0) + \mathrm{H}^0_u(u)\mathrm{H}^0(v)\mathbf{R}_u(0,0) + \mathrm{H}^0(u)\mathrm{H}^0_v(v)\mathbf{R}_v(0,0) + \mathrm{H}^0_u(u)\mathrm{H}^0_v(v)\mathbf{R}_{uv}(0,0) + \\ \mathrm{H}^1(u)\mathrm{H}^0(v)\mathbf{R}(1,0) + \mathrm{H}^1_u(u)\mathrm{H}^0(v)\mathbf{R}_u(1,0) + \mathrm{H}^1(u)\mathrm{H}^0_v(v)\mathbf{R}_v(1,0) + \mathrm{H}^1_u(u)\mathrm{H}^0_v(v)\mathbf{R}_{uv}(1,0) + \\ \mathrm{H}^0(u)\mathrm{H}^1(v)\mathbf{R}(0,1) + \mathrm{H}^0_u(u)\mathrm{H}^1(v)\mathbf{R}_u(0,1) + \mathrm{H}^0(u)\mathrm{H}^1_v(v)\mathbf{R}_v(0,1) + \mathrm{H}^0_u(u)\mathrm{H}^1_v(v)\mathbf{R}_{uv}(0,1) + \\ \mathrm{H}^1(u)\mathrm{H}^1(v)\mathbf{R}(1,1) + \mathrm{H}^1_u(u)\mathrm{H}^1(v)\mathbf{R}_u(1,1) + \mathrm{H}^1(u)\mathrm{H}^1_v(v)\mathbf{R}_v(1,1) + \mathrm{H}^1_u(u)\mathrm{H}^1_v(v)\mathbf{R}_{uv}(1,1) \end{gathered} \tag{4}$$

Представление для поверхности на прямоугольнике $[u_{min}, u_{max}] \times [v_{min}, v_{max}]$ получается из (4). Значения полиномов берутся в точках:

$$\frac{u - u_{min}}{u_{max} - u_{min}}, \quad \frac{v - v_{min}}{v_{max} - v_{min}}.$$

Для точек и значений производных в углах прямоугольника, необходимо выполнить следующие замены:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_u(0,0) &\to \mathbf{R}(u_{min}, v_{min}), \\
\mathbf{R}_u(0,0) &\to (u_{max} - u_{min})\mathbf{R}_u(u_{min}, v_{min}), \\
\mathbf{R}_v(0,0) &\to (v_{max} - v_{min})\mathbf{R}_v(u_{min}, v_{min}), \\
\mathbf{R}_{uv}(0,0) &\to (u_{max} - u_{min})(v_{max} - v_{min})\mathbf{R}_{uv}(u_{min}, v_{min}), \\
\mathbf{R}_u(1,0) &\to \mathbf{R}(u_{max}, v_{min}), \\
\ldots &\to \ldots \\
\mathbf{R}_{uv}(1,1) &\to (u_{max} - u_{min})(v_{max} - v_{min})\mathbf{R}_{uv}(u_{max}, v_{max}).
\end{aligned} \tag{5}$$

2 Преобразование в кривые и поверхности Безье

Воспользуемся связью полиномов (2) с полиномами Берштейна:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^0(u) &= \mathrm{B}_0(u) + \mathrm{B}_1(u) \\
\mathrm{H}_u^0(u) &= \frac{1}{3}\mathrm{B}_1(u) \\
\mathrm{H}^1(u) &= \mathrm{B}_3(u) + \mathrm{B}_2(u) \\
\mathrm{H}_u^1(u) &= -\frac{1}{3}\mathrm{B}_2(u)
\end{aligned} \tag{6}$$

Если подставить (6) в уравнение кривой (1), то после перегруппировки слагаемых, получим:

$$\mathbf{P}(u) = \mathrm{B}_0(u)\mathbf{R}(0) + +\mathrm{B}_1(u)\left(\mathbf{R}(0) + \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(0)\right) + \mathrm{B}_2(u)\left(\mathbf{R}(1) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(1)\right) + \mathrm{B}_3(u)\mathbf{R}_u(1). \tag{7}$$

Таким образом, точки эквивалентной кривой Безье определяются следующими формулами:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{R}(0), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{R}(0) + \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(0), \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{R}(1) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(1), \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{R}(1). \tag{8}$$

В случае задания кривой на интервале $[u_{min}, u_{max}]$, формулы (8) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0 = \mathbf{R}(u_{min}), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{R}(u_{min}) + \frac{1}{3}(u_{max} - u_{min})\mathbf{R}_u(u_{min}), \\
\mathbf{P}_2 = \mathbf{R}(u_{max}) - \frac{1}{3}(u_{max} - u_{min})\mathbf{R}_u(u_{max}), \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{R}(u_{max}).
\end{aligned} \tag{9}$$

Для поиска эквивалентной поверхности Безье воспользуемся снова соотношениями (6). После подстановки в (4) и перегруппировки слагаемых, получаем следующие выра-

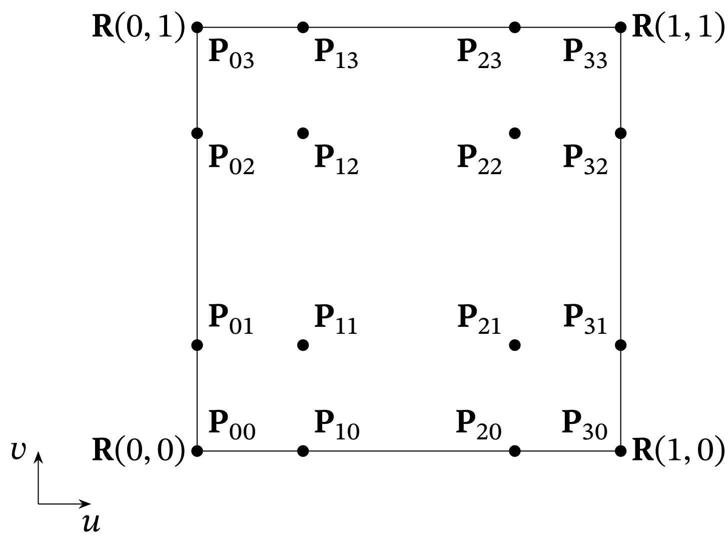

Рис. 1: Расположение точек для эквивалентной поверхности Безье

жения для точек эквивалентной поверхности Безье (см. рис. 1):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{00} &= \mathbf{R}(0,0), \\
\mathbf{P}_{10} &= \mathbf{R}(0,0) + \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(0,0,) \\
\mathbf{P}_{01} &= \mathbf{R}(0,0) + \frac{1}{3}\mathbf{R}_v(0,0), \\
\mathbf{P}_{11} &= \mathbf{R}(0,0) + \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(0,0) + \frac{1}{3}\mathbf{R}_v(0,0) + \frac{1}{9}\mathbf{R}_{uv}(0,0),
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{30} &= \mathbf{R}(1,0), \\
\mathbf{P}_{20} &= \mathbf{R}(1,0) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(1,0), \\
\mathbf{P}_{31} &= \mathbf{R}(1,0) + \frac{1}{3}\mathbf{R}_v(1,0), \\
\mathbf{P}_{21} &= \mathbf{R}(1,0) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(1,0) + \frac{1}{3}\mathbf{R}_v(1,0) - \frac{1}{9}\mathbf{R}_{uv}(1,0),
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{03} &= \mathbf{R}(0,1), \\
\mathbf{P}_{13} &= \mathbf{R}(0,1) + \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(0,1), \\
\mathbf{P}_{02} &= \mathbf{R}(0,1) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_v(0,1), \\
\mathbf{P}_{12} &= \mathbf{R}(0,1) + \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(0,1) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_v(0,1) - \frac{1}{9}\mathbf{R}_{uv}(0,1),
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{33} &= \mathbf{R}(1,1,) \\
\mathbf{P}_{23} &= \mathbf{R}(1,1) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(1,1), \\
\mathbf{P}_{32} &= \mathbf{R}(1,1) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_v(1,1), \\
\mathbf{P}_{22} &= \mathbf{R}(1,1) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_u(1,1) - \frac{1}{3}\mathbf{R}_v(1,1) + \frac{1}{9}\mathbf{R}_{uv}(1,1).
\end{aligned} \tag{13}$$

Для поверхности заданной на прямоугольнике $[u_{min}, u_{max}] \times [v_{min}, v_{max}]$, в формулах (10)–(13) следует воспользоваться заменами (5).

3 Преобразование составной кривой из эрмитовых сплайнов в B-сплайн

Составная кривая из n эрмитовых сплайнов определяется набором $n+1$ значений параметра u_i, $i = 1, 2, \dots, n+1$. Для каждого значения параметра u_k заданы вектора координат точки и касательной в этой точке: $\mathbf{R}(u_i)$, $\mathbf{R}_u(u_i)$.

На каждом участке составной кривой, используя формулы (9), мы можем преобразовать кубический эрмитов сплайн в кривую Безье. Для i кривой Безье:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0^{(i)} &= \mathbf{R}(u_i), \\
\mathbf{P}_1^{(i)} &= \mathbf{R}(u_i) + \frac{1}{3}(u_{i+1} - u_i)\mathbf{R}_u(u_i), \\
\mathbf{P}_2^{(i)} &= \mathbf{R}(u_{i+1}) - \frac{1}{3}(u_{i+1} - u_i)\mathbf{R}_u(u_{i+1}), \\
\mathbf{P}_3^{(i)} &= \mathbf{R}(u_{i+1}).
\end{aligned} \tag{14}$$

Известно, что для представления кривой Безье (14) в виде B-сплайна необходимо задать следующую последовательность узлов (далее в скобках после значения узла указывается число его повторений):

$$\text{knots}_i = [u_i \quad u_i \quad u_i \quad u_i, \quad u_{i+1} \quad u_{i+1} \quad u_{i+1} \quad u_{i+1}] = [u_i(4), u_{i+1}(4)]. \tag{15}$$

Тогда составную кривую можно описать B-сплайном со следующими значениями узлов и точек:

$$\begin{aligned}
\text{knots} = [&u_1(4), u_2(4), \dots, u_i(4), u_{i+1}(4), \dots, u_n(4), u_{n+1}(4)], \\
\mathbf{P} = [&\mathbf{P}_0^{(1)} \quad \mathbf{P}_1^{(1)} \quad \mathbf{P}_2^{(1)} \quad \mathbf{P}_3^{(1)}, \quad \mathbf{P}_0^{(2)} \quad \mathbf{P}_1^{(2)} \quad \mathbf{P}_2^{(2)} \quad \mathbf{P}_3^{(2)}, \quad \dots, \\
&\mathbf{P}_0^{(i)} \quad \mathbf{P}_1^{(i)} \quad \mathbf{P}_2^{(i)} \quad \mathbf{P}_3^{(i)}, \quad \mathbf{P}_0^{(i+1)} \quad \mathbf{P}_1^{(i+1)} \quad \mathbf{P}_2^{(i+1)} \quad \mathbf{P}_3^{(i+1)}, \quad \dots, \\
&\mathbf{P}_0^{(n-1)} \quad \mathbf{P}_1^{(n-1)} \quad \mathbf{P}_2^{(n-1)} \quad \mathbf{P}_3^{(n-1)}, \quad \mathbf{P}_0^{(n)} \quad \mathbf{P}_1^{(n)} \quad \mathbf{P}_2^{(n)} \quad \mathbf{P}_3^{(n)}].
\end{aligned} \tag{16}$$

Следует отметить, что представление составной кривой в виде B-сплайна (16) является избыточным, т.к. не учитывает свойство непрерывности составной кривой в узлах u_i. Если учесть непрерывность кривой, а также ее первой производной, то составную кривую можно представить в виде следующего B-сплайна:

$$\begin{aligned}
\text{knots} = [&u_1(4), u_2(2), \dots, u_i(2), u_{i+1}(2), \dots, u_n(2), u_{n+1}(4)], \\
\mathbf{P} = [&\mathbf{P}_0^{(1)} \quad \mathbf{P}_1^{(1)} \quad \mathbf{P}_2^{(1)}, \quad \mathbf{P}_1^{(2)} \quad \mathbf{P}_2^{(2)}, \quad \dots, \\
&\mathbf{P}_1^{(i)} \quad \mathbf{P}_2^{(i)}, \quad \mathbf{P}_1^{(i+1)} \quad \mathbf{P}_2^{(i+1)}, \quad \dots, \\
&\mathbf{P}_1^{(n-1)} \quad \mathbf{P}_2^{(n-1)}, \quad \mathbf{P}_1^{(n)} \quad \mathbf{P}_2^{(n)} \quad \mathbf{P}_3^{(n)}].
\end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, при построении B-сплайна (17) точки в местах соединения отдельных кривых не учитываются. Это можно сделать, т.к. точки $\mathbf{P}_3^{(i)}$ и $\mathbf{P}_0^{(i+1)}$ — совпадают и лежат на прямой, соединяющий точки $\mathbf{P}_2^{(i)}$ и $\mathbf{P}_1^{(i+1)}$.

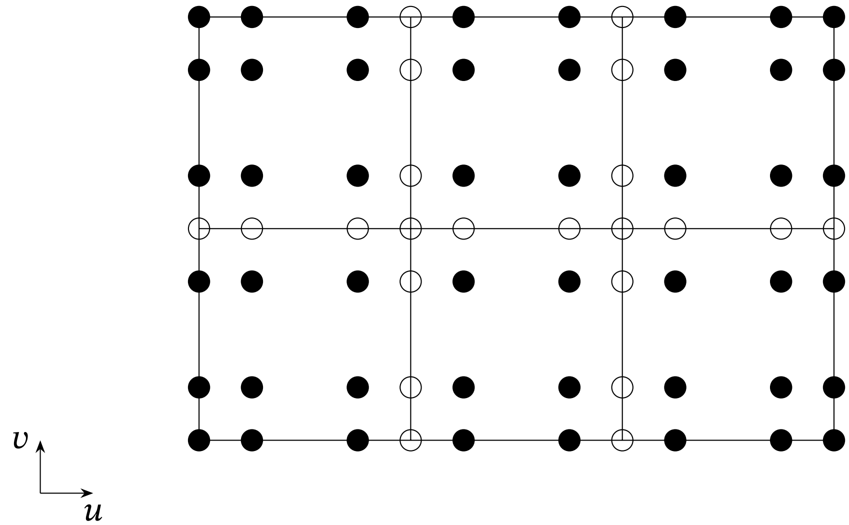

Рис. 2: Расположение точек при преобразовании составной поверхности в B-сплайн

4 Преобразование составной эрмитовой поверхности в B-сплайн

Для построения B-сплайн составной поверхности можно воспользоваться подходом, который был использован при преобразовании составных кривых. На первом этапе каждая ячейка составной поверхности преобразуется в Безье поверхность по формулам (10)–(13) с учетом замен (5). Затем составная поверхность может быть преобразована в B-сплайн со следующим узлами (в скобках указана кратность узлов сплайна):

$$\begin{aligned} \text{knots}_u &= [u_1(4), u_2(2), \dots, u_i(2), u_{i+1}(2), \dots, u_n(2), u_{n+1}(4)], \\ \text{knots}_v &= [v_1(4), v_2(2), \dots, v_j(2), v_{j+1}(2), \dots, v_m(2), v_{m+1}(4)], \end{aligned} \tag{18}$$

На рис. 2 показаны точки B-сплайна и точки Безье поверхностей. На границах ячеек точки Безье поверхностей не учитываются. Это позволяет сохранить принадлежность поверхности к классу C^1. Из рисунка видно, что для поверхности из $n \times m$ ячеек необходимо $n + 1$ узлов и $2(n + 1)$ точек для параметра u. Для параметра v — аналогично.